

# SOLUCIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS DE LA ECUACIÓN DE BOUSSINESQ CON POROSIDAD DRENABLE VARIABLE Y CONDICIÓN DE RADIACIÓN FRACTAL EN LA FRONTERA

## FINITE DIFFERENCE SOLUTION OF THE BOUSSINESQ EQUATION WITH VARIABLE DRAINABLE POROSITY AND FRACTAL RADIATION BOUNDARY CONDITION

Carlos Chávez<sup>1\*</sup>, Carlos Fuentes<sup>1</sup>, Manuel Zavala<sup>2</sup>, Felipe Zataráin<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro. 76010. Cerro de las Campanas, Santiago de Querétaro, Querétaro, México. (chagcarlos@gmail.com) (cbfuentesr@gmail.com).

<sup>2</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Zacatecas. 98000. Jardín Juárez Núm. 147, Centro Histórico. Zacatecas, México. (mzavala73@yahoo.com.mx). <sup>3</sup>Coordinación de Riego y Drenaje, Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. 62550. Paseo Cuauhnáhuac Núm. 8532. Jiutepec. Morelos, México. (fzata@tlaloc.imta.mx).

### RESUMEN

El drenaje subterráneo es utilizado para eliminar excedentes de agua en la zona radical y suelos salinos para lixiviar las sales. La dinámica del agua es estudiada con la ecuación de Boussinesq, sus soluciones analíticas son obtenidas asumiendo que la transmisibilidad del acuífero y la porosidad drenable son constantes y que la superficie libre se abate de manera instantánea sobre los drenes. La solución en el caso general requiere de soluciones numéricas. Se ha mostrado que la condición de frontera en los drenes es una condición de radiación fractal y la porosidad drenable es variable y relacionada con la curva de retención de humedad, y ha sido resuelta con el método del elemento finito, que en un esquema unidimensional puede hacerse equivalente al método de diferencias finitas. Aquí se propone una solución en diferencias finitas de la ecuación diferencial considerando la porosidad drenable variable y la condición de radiación fractal. El esquema en diferencias finitas propuesto ha resultado en dos formulaciones: en una aparecen de manera explícita la carga y la porosidad drenable, variables ligadas con una relación funcional, que se ha denominado esquema mixto; en la otra aparece sólo la carga hidráulica, denominada esquema en carga. Los dos esquemas coinciden cuando la porosidad drenable es independiente de la carga. Los esquemas han sido validados con una solución analítica lineal, y para la no linealidad se ha mostrado que la convergencia numérica es estable y concisa. La solución numérica es útil para la caracterización hidrodinámica del suelo a través de una modelación inversa, y para un mejor diseño de los sistemas de drenaje agrícola

### ABSTRACT

The underground drainage is used to remove excess water in the root zone and in saline soils to leach salts. The dynamics of water is studied with the Boussinesq equation; its analytical solutions are obtained assuming that the aquifer transmissivity and drainable porosity are constants and that the free surface instantly lowers on the drains. The solution in the general case requires numerical solution. It has been shown that the boundary condition in the drains is a fractal radiation condition and the drainable porosity is a variable and is related to the moisture retention curve, and has been solved with the finite-element method, which in one-dimensional scheme can become equivalent to the finite-difference method. It is proposed here a finite difference solution of the differential equation considering the variable drainable porosity and fractal radiation condition. The proposed finite difference scheme has resulted in two formulations: in one the head and drainable porosity explicitly appear, variables linked to a functional relationship, which has been called mixed scheme; in the other only the hydraulic head appears, called head scheme. The two schemes coincide when the drainable porosity is independent of the head. The schemes have been validated with a linear analytical solution; for the nonlinearity has been shown that the numerical convergence is stable and concise. The numerical solutions is useful for the hydrodynamic characterization of the soil through an inverse modeling, and for a better design of the agricultural underground drainage systems as the assumptions used in the classical solutions have been eliminated.

\*Autor responsable ❖ Author for correspondence.

Recibido: mayo, 2010. Aprobado: septiembre, 2011.

Publicado como ARTÍCULO en *Agrociencia* 45: 911-927. 2011.

**Key words:** mixed formulation, head formulation, retention curve, inverse modeling.

*Full Length Research Paper*

# Numerical solution of the Boussinesq equation: Application to the agricultural drainage

Carlos Chávez<sup>1</sup>, Carlos Fuentes<sup>1\*</sup>, Manuel Zavala<sup>2</sup> and Fernando Brambila<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro, C. U. Cerro de las Campanas, 76010, Querétaro, México.

<sup>2</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Zacatecas, Jardín Juárez No. 147, Centro Histórico, 98000, Zacatecas, México.

<sup>3</sup>Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, 04510, México.

Accepted 8 July, 2011

Water flow to subterranean drains is described by the Boussinesq equation. To solve this equation, analytical solutions comprising constants, such as the transmissivity and drainable porosity have been developed; however, these solutions assume that free surface of the water falls instantly over the drains. The aim of this investigation is to present a finite difference solution of the differential equation using a drainable porosity variable and a fractal radiation condition. Here, two schemes are presented: the first one, with an explicit head and drainable porosity, both joined by a functional relationship, called mixed formulation; and the second one, called head formulation, with only the head. By using a lineal analytical solution, both methods have been validated and the nonlinear part was stable and brief. The proposed numerical solution is useful for the hydraulic characterization of soils with inverse modelation and to improve the designs of agricultural drainage systems, when taking into consideration that the assumptions of the classical solution have been eliminated. To evaluate the descriptive capacity of the numerical solution, these solutions were used to describe a drainage experiment performed in the laboratory. The results show that the cumulative drained depth is well represented by these solutions with the fractal radiation and the variable drainable porosity.

**Key words:** Fractal radiation condition, variable drainable porosity, analytical solution, mixed formulation, head formulation.

## INTRODUCTION

Subsurface drainage systems are used to control the depth of the water-table and to reduce the water of the root zone or prevent soil salinity in the soil profile. The analysis of water dynamics in these systems has been studied accepting the validity of Darcy's law (1956) and depending on the scale of study; two differential equations can be used. The first is the Richards equation (1931), resulting from the application of the mass conservation principle in the flow of water in an elemental volume of porous medium, and the Darcy's law which permits the consideration of the geometry of the drains in

boundary conditions, but the simulation of water dynamics with two or three dimensional numerical solutions can be arduous (Zavala et al., 2007). The second equation is the Boussinesq equation (1904) for an unconfined aquifer, resulting from the application of the mass conservation principle, Darcy's law, and the Dupuit-Forcheimer hypothesis concerning the hydrostatics distribution of pressure (Bear, 1972), weighted soil properties and the vertical system. It is at most a two-dimensional equation. The aquifer is modeled on the ground and the geometry of the drains is introduced as mathematical lines or dots in a two-dimensional or one-dimensional analysis, respectively.

The one-dimensional Boussinesq equation has been the basis for developing approximate analytical solutions of the water dynamics in a drainage system within either a permanent or transitory regimen (Hooghoudt, 1940;

\*Corresponding author. E-mail: [cbfuentes@gmail.com](mailto:cbfuentes@gmail.com). Tel: +52 (442) 1921 200, ext. 6036. Fax: + 52 (442) 1921 200 ext. 6006.

# SOBRE UNA SOLUCIÓN EXACTA NO LINEAL DE LA ECUACIÓN FOKKER-PLANCK CON TÉRMINO DE SUMIDERO

• Carlos Fuentes • Carlos Chávez •

• Heber Saucedo •

• Manuel Zavala •

## Resumen

Se resuelve de manera exacta la ecuación Fokker-Planck con un término de sumidero, utilizando la difusividad de Fujita y la relación de Parlange entre la conductividad y difusividad. Para obtener la solución, se introduce primero el potencial de Kirchhoff y enseguida la coordenada móvil de Fujita-Storm; la ecuación diferencial toma la forma de la ecuación de Burgers, que es lineal en el término difusivo. El coeficiente convectivo de esta última se sustituye por la transformación de Hopf-Cole, con la finalidad de deducir la ecuación lineal clásica del calor. Durante las transformaciones, el término de sumidero se define funcionalmente, de modo que el resultado final sea precisamente la ecuación de calor sin término de sumidero. La solución exacta del potencial de Hopf-Cole se obtiene con la transformada clásica de Laplace para algunas condiciones iniciales y de frontera de interés. La solución de la ecuación Fokker-Planck en el espacio físico se obtiene a través de la inversión de las transformaciones utilizadas. La solución incluye como casos particulares las soluciones de Sanders *et al.*, y de Broadbridge y White. La solución exacta puede ser utilizada para validar soluciones numéricas de la ecuación Fokker-Planck y en estudios sobre la extracción de agua por las raíces de las plantas.

**Palabras clave:** características de Fujita-Parlange, transformación de Kirchhoff, transformación de Hopf-Cole, ecuación de Burgers.

## Introducción

Considérese la ecuación Fokker-Planck del movimiento unidimensional del agua en el suelo:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] - \frac{dK}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \Upsilon(z, t) \quad (1)$$

que resulta de la combinación de la ecuación de continuidad implicada por el principio de conservación de la masa:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial z} - \Upsilon(z, t) \quad (2)$$

y de la ley de Darcy generalizada a los suelos no saturados:

$$q = -D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} + K(\theta) \quad (3)$$

en donde  $\theta$  es el contenido volumétrico de agua, también denominado contenido de humedad;  $q$ , el caudal de agua por unidad de superficie de suelo o flujo de Darcy;  $z$ , la coordenada vertical orientada positivamente hacia abajo;  $t$ , el tiempo;  $\Upsilon$ , un término de sumidero, como el volumen de agua extraído por las plantas por unidad de volumen de suelo en la unidad de tiempo;  $D(\theta)$ , la conductividad hidráulica no

# SOLUCIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS DE LA ECUACIÓN DE BOUSSINESQ DEL DRENAJE AGRÍCOLA CON POROSIDAD DRENABLE VARIABLE Y SUJETA A UNA CONDICIÓN DE RADIACIÓN FRACTAL

• Carlos Chávez • Carlos Fuentes •  
*Universidad Autónoma de Querétaro, México*

• Manuel Zavala •  
*Universidad Autónoma de Zacatecas, México*

## Resumen

El drenaje subterráneo es utilizado para eliminar excedentes de agua en la zona radical y suelos salinos para lixiviar las sales. La dinámica del agua es estudiada con la ecuación de Boussinesq; sus soluciones analíticas son obtenidas asumiendo que la transmisibilidad del acuífero y la porosidad drenable son constantes, y que la superficie libre se abate de manera instantánea sobre los drenes. La solución en el caso general requiere de soluciones numéricas. En la literatura se ha demostrado que la condición de frontera en los drenes es una condición de radiación fractal y que la porosidad drenable es variable y relacionada con la curva de retención de humedad, y ha sido resuelta con el método del elemento finito, que en un esquema unidimensional puede hacerse equivalente al método de diferencias finitas. Aquí se propone una solución en diferencias finitas de la ecuación diferencial, considerando la porosidad drenable variable y la condición de radiación fractal. El esquema en diferencias finitas propuesto ha resultado en dos formulaciones: en una aparecen de manera explícita la carga y porosidad drenable, variables ligadas con una relación funcional, que se ha denominado esquema mixto; en la otra aparece sólo la carga hidráulica, denominada esquema en carga. Los dos esquemas coinciden cuando la porosidad drenable es independiente de la carga. Los esquemas han sido validados con una solución analítica lineal, y para la no linealidad se ha mostrado que es estable y concisa. La solución numérica es útil para la caracterización hidrodinámica del suelo a través de una modelación inversa, y para un mejor diseño de los sistemas de drenaje agrícola subterráneo, ya que las hipótesis consideradas en las soluciones clásicas han sido eliminadas.

**Palabras clave:** formulación mixta, formulación en carga, curva de retención, modelación inversa.

## Introducción

Los sistemas de drenaje subterráneos son ampliamente utilizados en la agricultura para eliminar excedentes de agua en la zona radical de las plantas y para lixiviar las sales del perfil de los suelos. La dinámica del agua en estos sistemas ha sido estudiada aceptando la validez de la ley de Darcy (1956) y en función de la escala de estudio se pueden utilizar dos ecuaciones diferenciales. La ecuación de Richards (1931)

—que resulta de la aplicación del principio de conservación de la masa en el flujo del agua en un volumen elemental de medio poroso y de la ley de Darcy— permite considerar la geometría de los drenes en las condiciones de frontera; sin embargo, la simulación de la dinámica del agua con las soluciones numéricas bi o tridimensionales puede ser ardua (Zavala *et al.*, 2003). La ecuación de Boussinesq (1904) de los acuíferos libres —que resulta de la aplicación del principio de conservación de la masa en una

# USO EFICIENTE DEL AGUA DE RIEGO POR GRAVEDAD UTILIZANDO YESO Y POLIACRILAMIDA

## Water Use Efficiency in Furrow Irrigation with Application of Gypsum and Polyacrylamide

Carlos Chávez<sup>1‡</sup>, Carlos Fuentes<sup>1</sup> y Eusebio Ventura Ramos<sup>1</sup>

### RESUMEN

Los sistemas de riego por gravedad presentan baja eficiencia en su aplicación, que se traduce en una mayor cantidad de agua para satisfacer la demanda hídrica del cultivo. El uso de acondicionadores como la poliacrilamida (PAM) y el yeso aplicados al suelo ayudan a reducir significativamente la cantidad de agua utilizada, debido a que modifican la estructura de la capa superficial del suelo, reducen la pérdida de agua por evaporación y ayudan a que el agua sea mejor aprovechada por las plantas. En el presente estudio se evaluó el uso eficiente del agua en riego por gravedad en dos parcelas tipo ecuación universal de pérdida de suelo; USLE, usando como referencia *Avena sativa* a una dosis de siembra de 120 kg ha<sup>-1</sup>. La primera parcela fue de control, mientras que en la segunda se aplicó 20 kg ha<sup>-1</sup> de PAM y 5 Mg ha<sup>-1</sup> de sulfato de calcio di-hidratado. Se midió en todo el periodo vegetativo la humedad volumétrica del suelo, la altura y lecturas SPAD de las plantas en ambas parcelas. Los riegos se aplicaron cuando se tenía una humedad aprovechable del 35% en el suelo, sumando un total de cuatro en la parcela con tratamiento y cinco en la parcela control, así, se redujo en 10 cm la lámina calculada, lo que implica un ahorro del 20% del volumen total. El rendimiento de materia seca obtenido en la parcela con tratamiento fue de 20.95 Mg ha<sup>-1</sup>, que representa 5.54 Mg ha<sup>-1</sup> más que lo obtenido en la parcela control, además de lograr una eficiencia de producción de 6.49 kg m<sup>-3</sup> de agua, que representa un aumento de 1.72 kg m<sup>-3</sup> de agua utilizado con respecto a la parcela control.

**Palabras clave:** *acondicionadores de suelo, suelo, Avena sativa, riego en surcos, rendimiento.*

<sup>1</sup> Universidad Autónoma de Querétaro. Facultad de Ingeniería. Cerro de las Campanas s/n. 76010 Querétaro, Querétaro, México.

<sup>‡</sup> Autor responsable (chagcarlos@gmail.com)

### SUMMARY

Furrow irrigation systems show low efficiency in their application. This can be translated as a greater amount of water necessary to satisfy the crop demand. The use of conditioners such as polyacrylamide (PAM) and gypsum in the soil significantly reduce water consumption, because they modify the structure of the top soil layer decreasing water loss through evaporation and allowing better absorption of water by plants. This paper evaluates water use efficiency of furrow irrigation in two typical plots using the universal soil loss equation (USLE). The plots were planted with *Avena sativa* at a rate of 120 kg ha<sup>-1</sup>. In the first control plot nothing was applied, while in the second 20 kg ha<sup>-1</sup> of PAM and 5 Mg ha<sup>-1</sup> of calcium sulfate dihydrate were applied. Volumetric moisture content of soil, height and SPAD readings plants were measured. Irrigation was applied in each plot when soil reached 35% available water, for a total of four in the treated plot and five in the control plot, reducing the calculated laminar flow by 10 cm: a savings of 20% of the total volume. Dry matter yield in the treated plot was 20.95 Mg ha<sup>-1</sup>, 5.54 Mg ha<sup>-1</sup> more than in the control plot. Crop production water efficiency in the treated plot was 6.49 kg m<sup>-3</sup>, which is 1.72 kg m<sup>-3</sup> higher than the control plot.

**Index words:** *conditioners of ground, ground, Avena sativa, furrow irrigation, yield.*

### INTRODUCCIÓN

La agricultura en México utiliza anualmente cerca del 77% del total de agua disponible en el país. La mayoría de los agricultores que hacen uso de ella operan con sistemas de riego por gravedad cuyas eficiencias de aplicación a nivel parcelario son menores al 50% (CONAGUA, 2010). Esto reduce la superficie regada, además de incrementar la explotación de los acuíferos ante la demanda del vital líquido. La reducción de la superficie regada se relaciona con la baja

# UNA SOLUCIÓN ANALÍTICA DE LA INFILTRACIÓN EN UN SUELO CON MANTO FREÁTICO SOMERO: APLICACIÓN AL RIEGO POR GRAVEDAD

• Carlos Fuentes • Carlos Chávez •  
*Universidad Autónoma de Querétaro, México*

• Felipe Zataráin •  
*Instituto Mexicano de Tecnología del Agua*

## Resumen

Se deduce una solución analítica de la ecuación de Richards utilizando las hipótesis de Green y Ampt para describir la infiltración del agua en un suelo con un manto freático somero. Se supone un perfil de humedad inicial lineal, de modo que el valor mínimo se encuentra en la superficie del suelo y el máximo en la superficie del manto freático. Se acepta una variación lineal de la succión en el frente de saturación, de modo que es máxima en la superficie del suelo y nula en el manto freático. La ecuación de Green y Ampt se deduce cuando la profundidad del manto freático tiende a infinito en la solución. La solución se compara con una solución numérica para la condición de contenido de humedad inicial lineal, supuesta para deducir la primera, y para una distribución hidrostática inicial de las presiones, con buenos resultados en ambos casos. En el modelo de Lewis y Milne se introduce la solución de la infiltración para describir tres pruebas de avance en el riego por melgas del cultivo de arroz en La Chontalpa, Tabasco, México, a diferentes profundidades del manto freático y caudales de riego. En la primera se calibran los parámetros relativos a la infiltración y a la ley de resistencia al flujo del agua en la superficie del suelo, y en las otras dos se lleva a cabo la predicción de la evolución del frente de avance; en las tres pruebas, las curvas teóricas de avance son muy cercanas a las curvas experimentales. La solución de la infiltración establecida se utiliza en el diseño del riego por gravedad en suelos con un manto freático somero, como ocurre en zonas agrícolas con riego o con drenaje lento.

**Palabras clave:** perfil de humedad inicial lineal, variación lineal de la succión en el frente de saturación.

## Introducción

En el estudio del movimiento del agua en el riego por gravedad se han utilizado ecuaciones racionales para describir el movimiento en la superficie del suelo y la infiltración. El movimiento en la superficie se modela generalmente con las ecuaciones de Saint-Venant (1871) y sus simplificaciones, como los modelos de onda difusiva, de inercia nula e hidrológico (Woolhiser, 1975; Strelkoff y Katopodes, 1977; Lewis y Milne, 1938). La infiltración se modela

con soluciones numéricas o analíticas de la ecuación de Richards (1931).

Entre las soluciones analíticas de la infiltración se encuentran la de Philip (1957, 1969), Parlange *et al.* (1982) y Fuentes *et al.* (2001), entre otras. Estas soluciones se obtienen suponiendo una columna semi-infinita de suelo con un contenido de humedad inicial constante a lo largo de la misma. Esta condición no es aplicable en suelos con mantos freáticos someros, ya que el perfil de humedad no es uniforme, como ocurre en zonas agrícolas de riego.

# Control de la erosión en surcos de riego usando poliacrilamida

Carlos Chávez  
Eusebio Jr. Ventura-Ramos  
Carlos Fuentes

Universidad Autónoma de Querétaro, México

*El presente estudio tuvo como objetivo evaluar el efecto de la aplicación de tres formas de poliacrilamida en el desprendimiento y transporte de partículas de suelo en un surco de riego simulado de seis metros y 3% de pendiente. La dosis evaluada en los tres casos fue de 20 kg ha<sup>-1</sup>. Para generar esfuerzos hidráulicos de corte crecientes se evaluaron cinco caudales: 75, 100, 150, 200 y 250 l h<sup>-1</sup> aplicados en forma consecutiva y creciente. Las pruebas fueron realizadas con tres repeticiones, midiendo los parámetros de flujo, geometría del canal y la tasa de desprendimiento del suelo. El suelo utilizado fue un vertisol pélico representativo de la región del Bajío. Los resultados obtenidos muestran que la aplicación de PAM disminuye significativamente la erosión en surcos en 81% para la aplicación granular, 84% para la aplicación diluida e inyectada en el agua, y 93% para la PAM diluida y asperjada sobre el terreno. El esfuerzo crítico de corte, indicativo del inicio del desprendimiento, aumentó gradualmente de 0.65 Pa para el tratamiento control a 1.0, 1.1 y 1.4 Pa con la aplicación granular, diluida en el agua de riego y asperjada sobre el surco, respectivamente. El factor de susceptibilidad,  $K_r$ , disminuyó de la misma manera de 0.004 m<sup>-1</sup>s en el control a 0.002 m<sup>-1</sup>s en la aplicación granular, 0.001 m<sup>-1</sup>s diluida e inyectada en el agua, y 0.0007 m<sup>-1</sup>s en la aplicación líquida-asperjada sobre el terreno, siendo esta última la que dio mejores resultados.*

**Palabras clave:** desprendimiento de suelo, factor de erodabilidad en surcos, esfuerzo crítico de corte, vertisol.

## Introducción

Uno de los mecanismos principales que causan la erosión hídrica es la formación del sello superficial al momento en que el suelo se expone a la acción de impacto de las gotas de lluvia y a los flujos concentrados en los surcos (Orts *et al.*, 2000). La formación del sello es el resultado de dos mecanismos complementarios (Yu *et al.*, 2003): a) la desintegración física de los agregados superficiales del suelo; y b) la dispersión fisicoquímica de las arcillas, que se mueven a capas más profundas del suelo mediante el agua infiltrada, bloquean los poros debajo de la superficie y forman una capa de baja permeabilidad llamada "zona de lavado". Ante estos problemas se ha tratado de buscar alternativas viables y económicas para contrarrestar este efecto. La aplicación

de poliacrilamida aniónica (PAM) es una opción que se ha usado para el acondicionamiento de los suelos desde 1950; sin embargo, la expansión de su uso no fue sino a partir de 1990 (Green y Stott, 2001). Cuando la PAM es aplicada al suelo, incrementa la estabilidad de los agregados, reduce el desprendimiento y transporte de los sedimentos, floclula los sedimentos suspendidos e incrementa la infiltración (Norton *et al.*, 1993; Lentz *et al.*, 2001; Leib *et al.*, 2005); además, es un producto no tóxico que por efecto de la radiación solar UV se degrada en CO<sub>2</sub>, agua y nitrógeno.

La PAM es un polímero soluble en agua con la capacidad de aumentar la estabilidad del suelo. Se agrupa en una clase de compuestos formados por la polimerización de la acrilamida (Lentz *et al.*, 2001). La PAM pura es un homopolímero de unidades idénticas